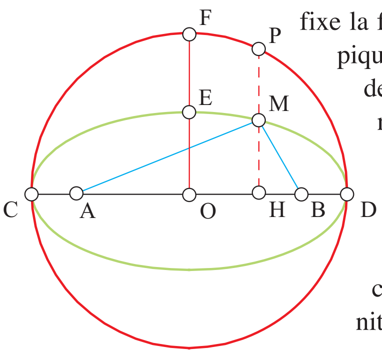
Analogie et transport de propriétés

L'analogie permet de transporter des propriétés d'un domaine à un autre. En mathématiques, son aboutissement actuel est la théorie des catégories mais nul besoin d'aller jusque-là pour en comprendre les principes et la rigueur des raisonnements…

Pour les Anciens Grecs, le cercle était perfection. L'ellipse, qui dans leur langue signifiait « manque », était considérée comme un cercle raté… Elle ressemble à un cercle mais il lui manque sa perfection. Si on en reste là, cette analogie n'apporte rien.

Quelques précisions sont nécessaires pour aller plus loin. Qu'est-ce qu'une ellipse ? Plusieurs définitions sont possibles. La plus simple est celle que les jardiniers emploient pour tracer des massifs. Elle utilise trois piquets et une ficelle. On plante deux des piquets en deux points dont la distance est inférieure à la longueur de la ficelle. On fixe la ficelle aux deux premiers piquets et on la tend avec le dernier. En le faisant tourner, on décrit une ellipse.

L'ellipse (en vert) est l'ensemble des points M tels que AM + BM = 2*a*. On montre qu'elle se déduit du cercle de diamètre [CD] (en rouge) par une réduction d'échelle dans le sens vertical (de rapport OE / OF), ce que l'on appelle une *affinité*.



De plus, l'analogie au cercle peut être explicitée : une ellipse est un cercle transformé par affinité (ou réduction d'échelle selon un axe). Cela peut sembler être une simple curiosité théorique et ne servir à rien ! C'est faux car certaines propriétés sont conservées par cette transformation. Elles portent le nom de propriétés affines et sont : parallélisme des droites, concourance, alignement des points, milieu, mesure algébrique, tangence, *etc*. En revanche, certaines propriétés sont perdues, ce sont les propriétés métriques comme les distances et les angles. Ainsi, les propriétés affines des cercles restent valables pour les ellipses, tandis que les propriétés métriques s'évanouissent.

Transport de tangentes

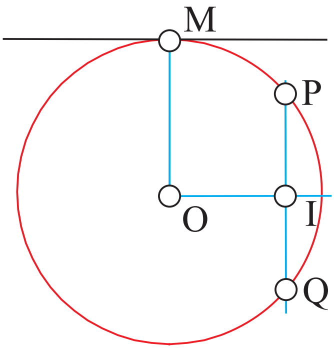
Prenons un exemple simple, celui de la construction de la tangente à un cercle de centre O en un point M : on trace la perpendiculaire en M au rayon [OM]. Elle ne se transporte pas à l'ellipse car elle est de nature métrique puisqu'on utilise un angle. En revanche, si on réussit à définir une construction affine, elle se transportera à l'ellipse.

Projection centrale et photographie

La projection centrale est ce que réalise une photographie. Dans ce type de géométrie, que l'on dit projective, deux droites parallèles se rencontrent à l'infini.
En géométrie projective, deux droites distinctes se coupent toujours, éventuellement sur une droite que l'on nomme droite à l'infini. L'idée peut sembler abstraite, pourtant elle devient concrète si on observe un grand espace plan comme l'altiplano bolivien. Malgré l'immensité, il ne nous semble pas infini mais limité par une ligne droite très éloignée : l'horizon.

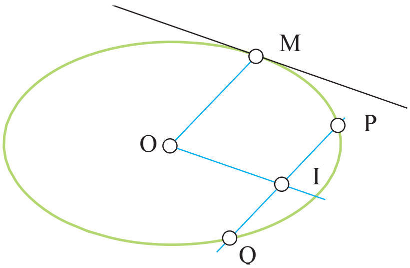
Le salar d'Uyuni en Bolivie offre une surface plane… limitée par la ligne d'horizon : la droite à l'infini.

Voie de chemin de fer sur les berges du salar d'Uyuni (Bolivie) : les rails se rejoignent sur la ligne d'horizon.



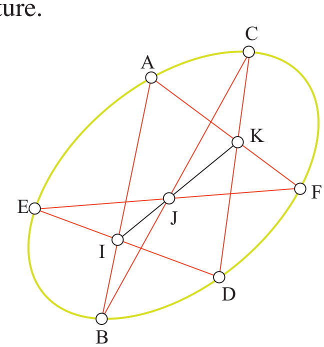
Transformation d'une propriété métrique en propriété affine. Dans le cercle, (OI) est perpendiculaire à (PQ) donc parallèle à la tangente en M.

L'idée est simple, on trace une parallèle au rayon [OM] coupant le cercle en deux points P et Q dont on considère le milieu I ; la tangente en M est la parallèle en M à la droite (OI). Cette propriété se démontre grâce aux propriétés métriques du cercle, elle n'en passe pas moins à l'ellipse.



Transport de la construction de la tangente à l'ellipse.

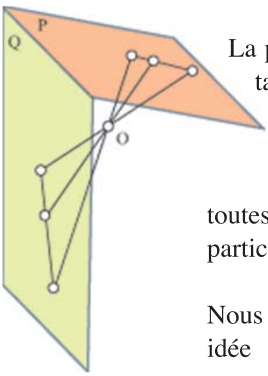
En utilisant la méthode que nous venons d'exposer, Blaise Pascal a démontré que si un hexagone ABCDEF est inscrit dans une conique (cercle, ellipse, parabole ou hyperbole), alors ses côtés opposés ([AB] et [DE], [BC] et [EF], [CD] et [FA]) se coupent en trois points alignés. La beauté de sa démonstration lui a fait nommer cette configuration « l'hexagramme mystique ». Même si le mystique est avant tout lui-même, d'aucuns qualifieraient effectivement sa démonstration de « magique » ou de « divine », selon sa culture.



L'hexagramme mystique de Pascal : les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique se coupent en trois points alignés.

Le Lucky Luke de la rédaction

À écouter Édouard Thomas, le secrétaire de rédaction de *Tangente*, Hervé Lehning serait le Lucky Luke de la vulgarisation mathématique et écrirait un article plus vite que lui-même écrit le message pour le lui demander ! Nous avons demandé au principal intéressé son secret. Sa réponse est simple : « *En quarante ans de carrière, j'ai abordé à peu près tous les sujets et, comme je prépare mes cours méticuleusement, j'ai des tonnes d'archives que j'ai bien classées. Il m'est facile alors de les transformer en articles.* » Le secrétaire de rédaction ne semble guère convaincu par cette explication. Alors quel est le secret d'Hervé ?



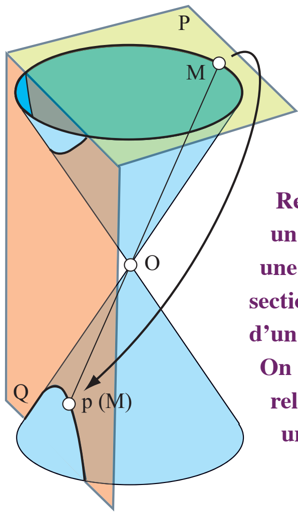
Une projection centrale conserve l'alignement.

La propriété étant affine, si le résultat est vrai pour un cercle, il est vrai pour toutes les ellipses. De même, on peut ainsi passer d'une parabole particulière à toutes les paraboles, et d'une hyperbole particulière à toutes les hyperboles.

Nous pouvons aller plus loin dans cette idée car la définition des coniques comme sections planes d'un cône montrent qu'elles sont toutes images l'une de l'autre dans une projection centrale (voir la figure). Comme une projection centrale conserve l'alignement, il suffit de prouver le résultat pour une conique particulière, cercle, parabole ou hyperbole pour qu'elle soit vraie pour toutes.

Pascal utilisait le cercle et la géomètrie pure. Quand on dispose de la geometrie analytique, il est plus simple d'utiliser la parabole car son équation est très simple. Le principe reste le même et nous renvoyons au numéro 66 de *Tangente Sup* pour une démonstration complète.

H.L.



Relation entre un cercle et une hyperbole, sections planes d'un même cône. On a la même relation avec une parabole.

Hervé Lehning

Le parcours scolaire d'Hervé Lehning est sans détour : éternel premier de classe, École normale supérieure et agrégation de mathématiques. Sans doute cela suffit-il pour comprendre sa carrière de professeur en école d'ingénieurs puis en mathématiques spéciales. Cependant, une première originalité dans sa formation explique la coloration qu'il donnera plus tard à un grand nombre de ses articles et ouvrages. Parallèlement à ses études, quand d'autres donnent des « petits cours » de mathématiques pour arrondir leurs fins de mois, Hervé Lehning choisit de travailler dans l'informatique. La demande est forte à cette époque où une grande partie du personnel en place est dépassé par le passage des tabulatrices aux ordinateurs, c'est-à-dire de la programmation par cordons qu'on enfiche à la programmation en langages évolués comme le Cobol ou le Fortran. Hervé Lehning occupe successivement les postes d'opérateur, de pupitreur puis d'analyste-programmeur alors qu'il étudie les mathématiques par ailleurs.

On comprendra ainsi pourquoi son premier ouvrage publié se trouve à l'intersection des mathématiques et de l'informatique (*Mathématiques par l'informatique individuelle*, Masson, 1982). Suivront chez le même éditeur et à la même époque une série d'ouvrages d'analyse destinés aux étudiants de mathématiques supérieures et spéciales. Cette volonté de vulgarisation fait que, à la fin de cette période, il rejoint l'équipe de *Tangente*. Sa première apparition date du numéro 5, en 1988.

D'autres particularités expliquent certains de ses choix, non habituels chez un pur mathématicien : dossier sur la guerre (*Tangente* 91 à l'occasion de la seconde guerre d'Irak), ouvrages sur la cryptographie (le hors-série 26 de *Tangente* et *l'Univers des Codes secrets de l'Antiquité à Internet* paru chez Ixelles en 2012), le hors-série 19 de *Tangente* consacré au sport, et les photographies dont il illustre souvent ses articles.

Tout cela tient sans doute à sa famille. Son père, militaire de carrière et géniteur d'une multitude d'enfants, avait choisi de l'engager dans l'armée à l'âge de 10 ans pour économiser le coût de ses études et de son entretien. C'était possible à l'époque ! Ainsi, Hervé commence ses études secondaires à l'école militaire préparatoire d'Aix-en-Provence, institution créée pour aider les militaires à élever leurs (souvent nombreux) enfants. Outre les mathématiques et les autres matières scolaires, il y a appris l'escalade et la photographie… mais n'a jamais réussi à maîtriser l'art de marcher au pas. Il semble avoir été le seul à remarquer que le nombre d'élèves de sa compagnie (97) était premier et que cette particularité étonnante restait vraie en y ajoutant l'encadrement militaire (97 + 4 = 101).

Quel est l'âge du capitaine ?

Hervé Lehning aime transformer son âge en énigme en donnant trois indices.

Le premier est une photo prise à Alger en décembre 1961.

Le deuxième est une plaque en marbre située au palais du Trocadéro commémorant un évènement international qui a eu lieu à cet endroit au jour et à l'heure de sa naissance.

Le troisième indice est de nature mathématique : il a fêté ses 100 ans en 1997 (voir *Tangente* 62) et les fêtera à nouveau en 2012.

Alors, quel est l'âge du capitaine ?

Une autre originalité est qu'il est titulaire d'une maîtrise d'histoire… des religions, une matière qui flirte avec la théologie, la philosophie, les langues mortes et la littérature. Cela explique qu'il se soit occupé du hors-série 10 de *Tangente*, *Mille ans d'histoire des mathématiques*, qu'il fait commencer avec le pape de l'an mil, Gerbert d'Aurillac. Cette spécialisation explique sans doute que *Questions de maths sympas pour M. et Mme Toutlemonde* (Ixelles, 2011, et Prix Tangente 2011) s'intéresse entre autres au calcul de la date de Pâques dans les trois religions monothéistes principales ainsi qu'au calcul de la Qibla pour orienter sa prière si on est musulman.

L'événement international est la Déclaration universelle des droits de l'homme (10 décembre 1948 à 20 heures). En base 7, 100 vaut 49 et en base 8, il vaut 64.