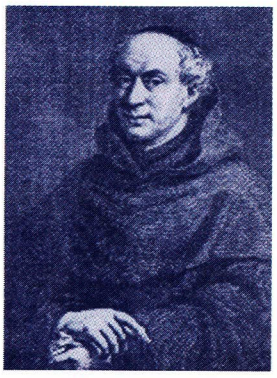
par Hervé Lehning

Sébastien Truchet
le prêtre paveur

À l'époque de Louis XIV, un prêtre dominicain – Sébastien Truche découvre une méthode simple pour créer une infinité de pava agréables à l'œil en n'utilisant qu'un seul carreau de faïence. On p représenter mathématiquement le procédé par une codification binai



Sébastien Truchet est né à Lyon en 1657 et mort en 1729. Il est connu essentiellement pour des travaux en typographie et en hydraulique :
— En typographie, il a inventé le point typographique et le *romain du roi*, la première fonte de caractères d'imprimerie définis par des contours faits de segments de droites et d'arcs de cercles. Cette idée est très proche des approximations actuelles par des courbes de Bézier.
— En hydraulique, il a conçu la majorité des canaux de l'époque.

C'est en 1704 que le bon père Truchet découvre un lot de carreaux de faïence de la forme suivante :

Motif de base du pavage de Truchet.

Il cherche alors à les combiner de façon à créer des dessins plaisants et publie le résultat de ses recherches dans les *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*. Bien sûr, ce n'était pas la première fois que des paveurs pavaient avec de tels carreaux, mais l'originalité de Truchet est d'avoir étudié toutes les combinaisons possibles. Avec un seul carreau, on obtient déjà quatre pavages différents :

Les quatre façons de disposer un carreau.

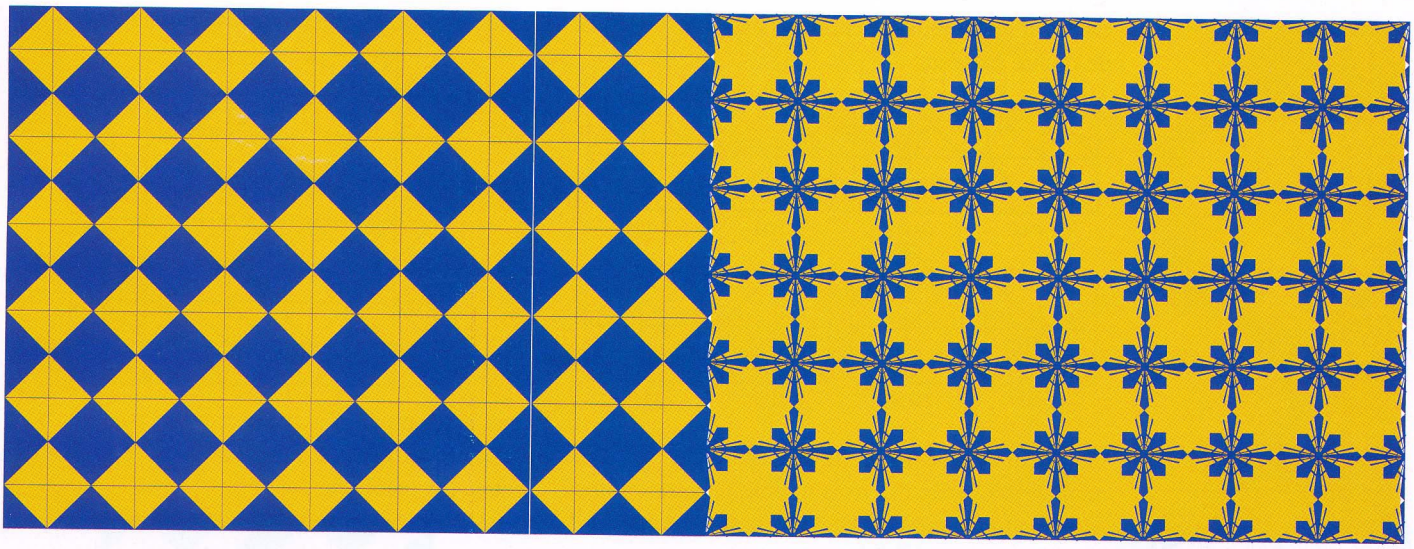
Pour remplir un rectangle de $p \times q$ carreaux, on commence par placer un premier carreau. On a donc 4 possibilités pour occuper la première place. Pour chacune de ces possibilités, on a le choix entre 4 carreaux pour occuper la seconde place ce qui donne $4 \times 4 = 4^2$ possibilités pour les deux premiers carreaux. De même pour la sième ce qui fait 4^3 possibilités pour les troi miers. Au final, on obtient 4^{pq} possibilit remplir un rectangle de $p \times q$ carreaux.
Pour estimer la valeur de ce nombre, preno exemple concret. Imaginons que nous vou carreler un mur de salle de bain de 3 m de lor 1,5 m de haut avec des carreaux de 15 cm de ce qui fait un rectangle de 10 carreaux su Nous obtenons 4^{200} soit $2{,}58 \times 10^{120}$ possib Pour estimer à quel point ce nombre est énc imaginons que nous voulions voir chacun d carrelages l'espace d'un milliardième de sec Cet examen demanderait 8×10^{103} années à-dire bien plus que l'âge du système solaire Le moins que l'on puisse dire est que nous a l'embarras du choix.

Les motifs de Truchet linéaires

Pour cette raison, nous proposons d'imposer conditions supplémentaires aux motifs du Truchet :

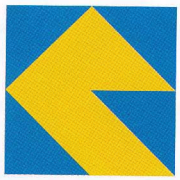
- les diagonales forment une ligne cont
- les changements de couleurs se font su lignes.

Pour les distinguer du cas général, nous not motifs de Truchet linéaires ou plus simple motifs TL ces nouveaux motifs. Ainsi, le moti vant est TL :



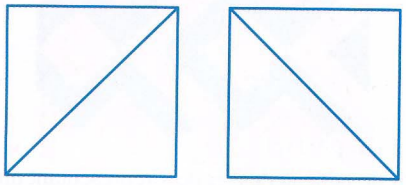
Le même pavage de Truchet : de base et "artistique".

alors que celui-ci ne l'est pas :



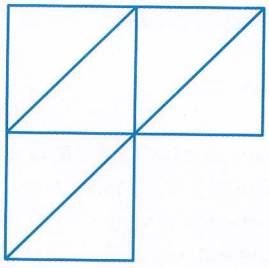
Codification des motifs

En inversant les couleurs d'un motif donné, on obtient un autre motif et un seul. En fait, dans un premier temps, on peut oublier les couleurs pour décrire un motif. On dispose alors de seulement deux carreaux de base :



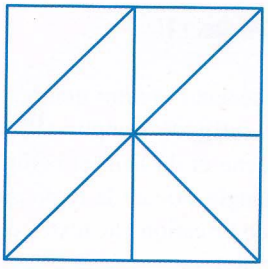
0 1

Considérons trois carreaux de base disposés de la façon suivante :



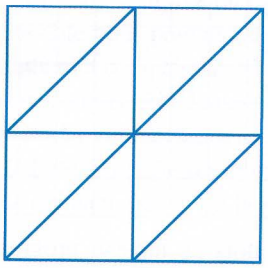
000

Chaque carreau étant codé en binaire, la réunion des trois peut l'être également comme le montre la figure ci-dessus ainsi que les suivantes.
Quel carreau peut-on ajouter pour obtenir un motif TL ? Pour le savoir, il suffit d'examiner les deux cas possibles. Dans ce premier cas, le 1 est impossible puisqu'il donne :



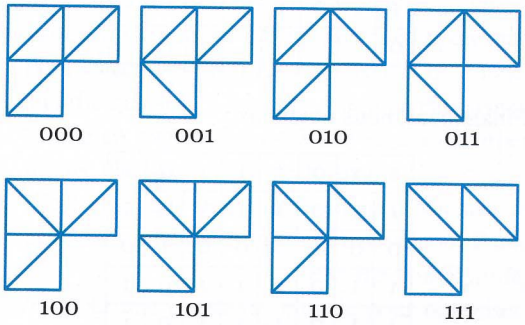
0001

En revanche, en ajoutant le 0, on obtient un motif TL :



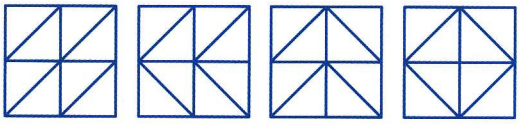
0000

On peut recommencer à partir de chaque motif de trois carreaux (codés de 000 à 111) :

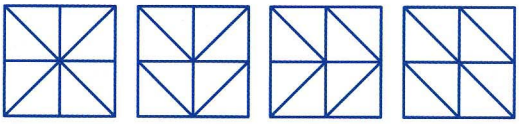


Il y a au total 4^{pq} possibilités de remplir un rectangle de $p \times q$ carreaux.

On obtient toujours un et un seul motif possible de quatre carreaux :



0000 0011 0101 0110



1001 1010 1100 1111

+	0	1
0	0	1
1	1	0

On constate que le motif ajouté a pour code la somme des codes des trois premiers, cette somme se faisant suivant la table d'addition ci-contre.
Ainsi les huit cas peuvent s'écrire :
$0 + 0 + 0 = 0$, $0 + 0 + 1 = 1$, $0 + 1 + 0 = 1$, $0 + 1 + 1 = 0$, $1 + 0 + 0 = 1$, $1 + 0 + 1 = 0$, $1 + 1 + 0 = 0$, $1 + 1 + 1 = 1$.

Réalisation d'un motif TL

La règle précédente montre que pour remplir un rectangle, il suffit de remplir aléatoirement les bords de gauche et du haut et compléter alors le reste du rectangle suivant la règle précédente. En utilisant la codification du texte, on peut partir d'un tableau du type :

1	1	0	1	1	1	0	1
1							
0							
1							
1							
1							
0							
0							

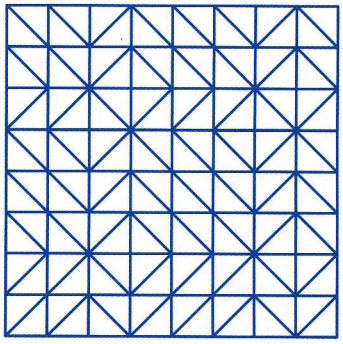
On remplit alors ce tableau progressivement en utilisant la règle précédente, voici le tableau après les trois première étapes :

1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1				
0							

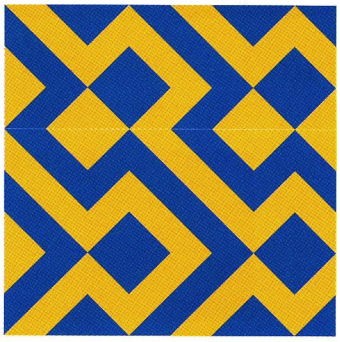
Finalement, nous obtenons :

1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0

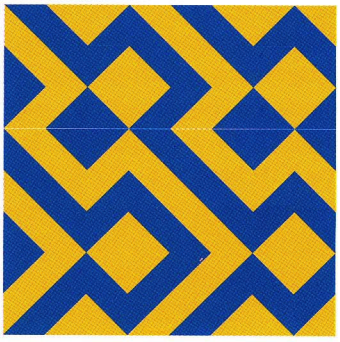
Le tableau final obtenu correspond au dessin



Il ne reste plus qu'à colorier notre pavage. B entendu, on peut le faire de deux façons di rentes. En voici une :



L'autre est complémentaire, le voici :



À partir du tableau de 0 et de 1 représentant un pa ge TL, il est toujours possible d'en déterminer coloriage. Ce résultat se démontre par récurrence. peut faire ce travail à la main comme ci-dessus. peut également déterminer un algorithme permett de le faire au moyen d'un ordinateur.

Réalisation d'un motif TL

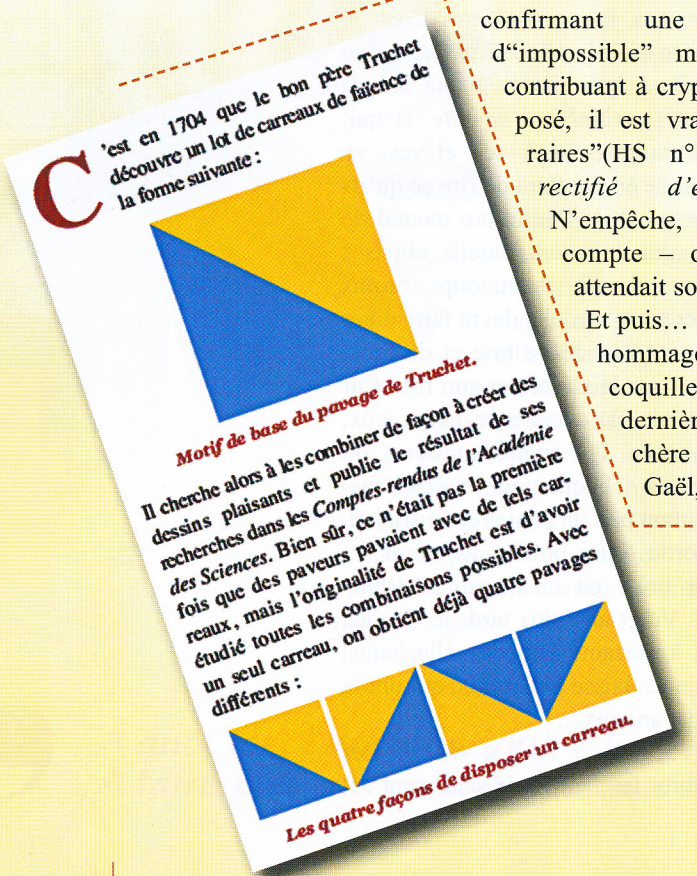
Pour obtenir un pavage TL d'un rectangle $p \times$ il suffit de choisir les carreaux (sans couleur) bords de gauche et du haut, ce qui fait $p + q -$ choix. On obtient donc 2^{p+q-1} possibilit Ensuite, nous avons deux choix de couleurs p sibles ce qui donne 2^{p+q} possibilités. Pour salle de bains de 10 carreaux sur 20 de no exemple, cela donne 2^{30} possibilités c'est-à-d environ un milliard de motifs TL possibles. C' beaucoup plus raisonnable que précédemment.

H.

Carrelage du château de Sperlinga (XIIe s.)
©Stella Baruk

marque ma première collaboration à *Tangente* pour le compte rendu d'un film au titre alléchant : *c'est la tangente que je préfère*…Eh bien, oui. Au cours des ans, cela devenait de plus en plus vrai. Cumulant sujets, infos, dossiers, changeant de look, s'étoffant, se thématisant, se diversifiant en de multiples publications, *Tangente* tenait ses promesses du tout-et-partout-mathématique , charriant pépites et … coquilles. Ah, les coquilles… Dans un article traitant de diverses quadratures, intitulé *« Impossible » est mathématique*, alors que j'avais naïvement nommés B,M,H,I quatre points *distincts* d'une figure, je découvris qu'ils étaient *tous* devenus B ; phagocytage confirmant une autre sorte d"impossible" mathématique et contribuant à crypter le texte proposé, il est vrai, à des "littéraires"(HS n°16). Auront-ils *rectifié d'eux-mêmes* ? N'empêche, c'était un petit compte – ou conte – qui attendait son heure.

Et puis… en guise de petit hommage à toutes les coquilles de ces vingt dernières années, et, chère Gaël, précieuse Gaël, à ce si drôle « dernier ver de la chanson » (n°117), ce *vers* décasyllabique : "un *ver* à soie dans un verre à soi", ou ce blason, "ver vert sur vair".



C'est en 1704 que le bon père Truchet découvre un lot de carreaux de faïence de la forme suivante :

Motif de base du pavage de Truchet.

Il cherche alors à les combiner de façon à créer des dessins plaisants et publie le résultat de ses recherches dans les *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*. Bien sûr, ce n'était pas la première fois que des paveurs pavaient avec de tels carreaux, mais l'originalité de Truchet est d'avoir étudié toutes les combinaisons possibles. Avec un seul carreau, on obtient déjà quatre pavages différents :

Les quatre façons de disposer un carreau.

NDLSR.
Secret à taire : Sobre la plupart du temps, la secrétaire (secréterre ?) de rédaction boit parfois un lombric de trop.

+ Pavage-souvenir

Vous aurez compris que par neuf, ou même par treize, effeuiller *Tangente* est bien mission impossible. J'ai donc plutôt envie d'évoquer une petite madeleine surgie dans ma mémoire il y a moins d'un mois. C'était en Sicile, dans l'extraordinaire château normand et troglodyte de Sperlinga (XIIe s.). Dans la petite chapelle, plus récente, je tombe en arrêt devant un groupe de neuf carreaux, restes ou début d'un dallage, qui ne semble intéresser personne, son intérêt esthétique paraissant des plus restreints. Où donc les avais-je vus ? Par fragments, me revint un nom : Truchet ! Truchet, annonçai-je, à mes compagnons stupéfaits. Et tout doucement, le souvenir me revint, approximatif mais émerveillé, non d'une baignoire qui débordait, mais tout comme, du nombre fabuleux de possibilités de carreler un modeste mur de salle de bains. Une fois rentrée, je le retrouvai : c'était bien par le truchement de *Tangente* que j'avais connu Sébastien Truchet, "prêtre paveur", dans un superbe numéro 99 sur les pavages. Etait-ce mon enfance orientale qui m'y avait rendue particulièrement sensible, mais il m'était paru que les analyses de leur beauté loin de les dépoétiser leur apportait ce "plus" que, depuis vingt ans, les "fous de mathématiques" tentaient de transmettre en proposant de voir, d'entendre, d'imaginer au delà de ce qui, ordinairement se voit ou entend.

Pari proposé, donc, et tenu : entre autres missions, *faire sentir la beauté*. Je ne l'avais pas dit ? C'était, page 16, dans le numéro 1. Alors bon anniversaire, *Tangente* !

S.B.

Extrait de **Sébastien Truchet, le prêtre paveur in Tangente n°99**

On y lit aussi ceci : « Imaginons que nous voulions carreler un mur de salle de bain de 3 m de long sur 1,5 m de haut avec des carreaux de 15 cm de côté, ce qui fait un rectangle de 10 carreaux sur 20. Nous obtenons 4^{200} soit 2,58 x 10^{120} possibilités. Pour estimer à quel point ce nombre est énorme, imaginons que nous voulions voir chacun de ces carrelages l'espace d'un milliardième de seconde. Cet examen demanderait 8 x 10^{103} années c'est-à-dire bien plus que l'âge du système solaire ! »